100

الجمهوريـة العربيـة السوريـة

جامعـــة البعـــث

كليـــة العـــلوم

قســـم رياضيـــات

مبادئ الإحصاء والاحتمال

(نظري)

المحاضرة (5)

السنة الأولى _ الفصل الثاني



المحاضرة النظرية الخامسة

المتجهات العشوائية

تعريف المتجه العشوائي: إذا كان لدينا $X_1, X_2, \dots, X_n$ متحول عشوائي أي لدينا n متحول عشوائي ندعو بالتعريف المتجه $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ الذي مركباته هذه المتحولات العشوائية

فإذا كانت المتحولات X_k منفصلة (متقطعة) كان $\underline{X}$ متجه منفصل/متقطع /

وإذا كانت X_k متصلة/مستمرة) كان $\underline{X}$ متجه متصل (مستمر)

المتجه العشوائي المتقطع:

ليكن $\underline{X}$ متجهاً عشوائياً متقطعاً عندئذٍ يكون قانونه الاحتمالي أو الدالة الاحتمالية المشتركة

$$\Rightarrow F(\underline{X}) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$$

تتميز هذه الدالة بالتالي

1. $F(\underline{X}) \geq 0$ دالة غير سالبة لأنها قانون احتمالي

2. $\sum_{x_1} \sum_{x_2} \dots \sum_{x_n} F(\underline{X}) = 1$

لإيجاد التوقع للمتحول R من المرتبة K (رتبة التوقع)

$$E X_i^k = \sum_{x_1, x_2, \dots, x_n} X_i^k \cdot F(x)$$

مثال: احسب احتمال التوقع الثالث من المرتبة 5

$$E X_3^5 = \sum_{x_1, x_2, \dots, x_n} X_3^5 \cdot F(x)$$

المجموع على جميع المتحولات

* الاستقلال العشوائي: إذا كان لدينا قانون احتمالي بغض النظر إذا كان منفصل أو مستمر إذا كان:

تعريف 1: $F(X) = g(X_1) \cdot g(X_2) \cdots g(X_n)$

$F(X) = \prod_{i=1}^{n} g(X_i)$ ← رمز الجداء (اختصار ومعناه)

أي إذا تمكنت من كتابة الدالة الاحتمالية المشتركة على شكل جداء دوال بشرط أن تكون الدالة الأولى تابعة لـ X_1 فقط ثم الدالة الثانية تابعة لـ X_2 فقط وهكذا... إذاً جداء دوال تابعة لمتحول واحد فقط فهنا حصراً تكون في حالة استقلال عشوائي وهو تعريف أول

* سنقوم الآن بمناقشة مفهوم دوال التوزيع الهامشي *

معنى كلمة هامش أي تجاهل وفي بعض الأحيان يكون هذا التهميش إيجابياً

مثلاً إذا بدنا دالة التوزيع الهامشية لـ X_1

$\Rightarrow F(X_1) = \sum_{x_2, x_3 \cdots x_n} F(x)$

نجمع على جميع المتحولات ماعدا X_1 أي نكون قمنا بتهميش X_1 وهو تهميش إيجابي لـ X_1 يعطي قانون تبعية لـ X_1 وهكذا على جميع المتحولات

$F(X_2) = \sum_{x_1, x_3 \cdots x_n} F(x)$

$F(X_3) = \sum_{x_1, x_2 \cdots x_n} F(x)$

إذاً هذه هي دالة التوزيع الهامشية

$F(X_1, X_3) = \sum_{x_2 x_4 x_5 \cdots x_n} F(X)$

التعريف الثاني للاستقلال العشوائي:

$\{F(x_1) \cdot F(x_2) \cdots F(x_n) = F(X)\}$

الدالة الاحتمالية = جداء دوال التوزيع الهامشي للمتحولات المشتركة



مثال : ليكن لدينا $F(X) = \alpha \cdot 2^{-(x_1+x_2+x_3)}$

حيث $x_k = 0, 1, \ldots, \infty$ أي ما يطلق على x_1 يطلق على x_2 ويطلق على x_3

المطلوب :

① : أوجد α حتى يكون قانون احتمالي ؟

الحل :

نلاحظ أن الدالة أسية إذاً هي غير سالبة $\Leftarrow F(X) \geq 0$

حتى تكون قانون احتمالي يجب أن يكون

$$\sum_{x_1} \sum_{x_2} \sum_{x_3} F(x_1, x_2, x_3) = 1$$

نلاحظ أن α لا تتعلق بالمتحولات إذاً يمكن إخراجها خارج المجموع

$$\Rightarrow \alpha \underbrace{\left(\sum_{x_1=0}^{\infty} 2^{-x_1}\right)}_{2} \underbrace{\left(\sum_{x_2=0}^{\infty} 2^{-x_2}\right)}_{2} \underbrace{\left(\sum_{x_3=0}^{\infty} 2^{-x_3}\right)}_{2} = 1$$

نلاحظ أن هذه السلاسل الثلاثة هي عبارة عن سلاسل هندسية

أساسها $\sum^{n}$ ونلاحظ أن $|P| < 1$

إذاً هي متقاربة ومجموعها يساوي $\sum P^n = \frac{1}{1-P}$

وأساس هذه السلاسل هو $P = \frac{1}{2}$ إذاً $\sum P^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

$$\Rightarrow \alpha (2) \cdot (2) \cdot (2) = 1 \Rightarrow 8\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow F(\underline{X}) = \frac{1}{8} \cdot 2^{-(x_1+x_2+x_3)}$$

② : أثبت بطريقتين أن هذه المتحولات العشوائية مستقلة

حل : الطريقة الأولى : حسب التعريف الأول للاستقلال العشوائي

بأن نكتب الدالة الاحتمالية المشتركة على شكل جداء دوال

لدينا

$$f(\underline{X}) = \frac{1}{8} 2^{-(X_1+X_2+X_3)}$$

$$\Rightarrow f(\underline{X}) = \frac{1}{8} \cdot 2^{-X_1} \cdot 2^{-X_2} \cdot 2^{-X_3}$$

$$= \frac{1}{8} g(X_1) \cdot g(X_2) \cdot g(X_3)$$

حسب التعريف الأول للمتحولات العشوائية مستقلة

الطريقة الثانية : نحسب $f(X_1)$ و $f(X_2)$ و $f(X_3)$ يجب أن يكون

$$f(X_1) \cdot f(X_2) \cdot f(X_3) = f(\underline{X})$$

لنوجد $f(X_1)$ حيث نقوم بالجمع على الدوال (X_2, X_3)

$$f(X_1) = \frac{1}{8} \sum_{X_2,X_3}^{\infty} 2^{-(X_1+X_2+X_3)}$$

نجزئ مالا نهاية المجاميع

$$= \frac{2^{-X_1}}{8} \sum_{X_2=0}^{\infty} 2^{-X_2} \sum_{X_3=0}^{\infty} 2^{-X_3} \qquad X_1 = 0, 1, \ldots \text{ و}$$

$$= \frac{2^{-X_1}}{8} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{4 \cdot 2^{-X_1}}{8} = \frac{2^{-X_1}}{2}$$

وبنفس الطريقة نجد أن

$$f(X_2) = \frac{2^{-X_2}}{2} \quad \text{و} \quad X_2 = 0, 1, \ldots$$

$$f(X_3) = \frac{2^{-X_3}}{2} \quad \text{و} \quad X_3 = 0, 1, \ldots$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{3} = f(X_1) \cdot f(X_2) \cdot f(X_3) = \frac{2^{-X_1}}{2} \cdot \frac{2^{-X_2}}{2} \cdot \frac{2^{-X_3}}{2}$$

$$= \frac{1}{8} 2^{(-X_1-X_2-X_3)} = \frac{1}{8} 2^{-(X_1+X_2+X_3)} = f(\underline{X})$$

إذاً المتحولات مستقلة

③ احسب $F(x_1, x_3)$

$$F(x_1, x_3) = \frac{1}{8} \sum_{x_2=0}^{\infty} 2^{-(x_1+x_2+x_3)}$$

$$= \frac{1}{8} 2^{-x_1} \cdot 2^{-x_3} \cdot \sum_{x_2=0}^{\infty} 2^{-x_2} = \frac{2^{-x_1} \cdot 2^{-x_3}}{8} \cdot 2$$

$$= \frac{2^{-x_1} \cdot 2^{-x_3}}{4} = \frac{2^{-(x_1+x_3)}}{4}$$

ممكن سؤال امتحان ((أوجد دوال التوزيع الاحتمالية الهامشية الممكنة))

تمرين وظيفة

$$F(x_1, x_2) = p^{x_1+x_2}(1-p)^{2-(x_1+x_2)}$$

$x_1 = 0, 1$ وَ $x_1, x_2 = 0, 1$

$x_2 = 0, 1$ دليلين هام

المطلوب: إيجاد دوال التوزيع الاحتمالية الهامشية الممكنة

المتجهات المستمرة (المتصلة) مستمر

نقول أن $\underline{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ متجه عشوائي إذا أمكن إيجاد دالة غير سالبة بحيث

$$\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(\underline{X}) \, d\underline{X}$$ تكامل مجالات جزئية

أي أن $d\underline{X} = dx_1 \, dx_2 \dots dx_n$

$$= P\left(|x_1|_{a_1}^{b_1}, |x_2|_{a_2}^{b_2}, |x_3|_{a_3}^{b_3} \dots |x_n|_{a_n}^{b_n}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2 \dots x_n) \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_n = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1) \cdot f(x_2) \dots f(x_n) \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_n = 1$$

سؤال: ما هي العلاقة بين دالة التوزيع الاحتمالي ودالة الكثافة الاحتمالية؟

مشتق دالة التوزيع الاحتمالية هي دالة الكثافة الاحتمالية

$$\Rightarrow F'(x) = f(x)$$

دالة التوزيع ← ، دالة الكثافة

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$

يجب الانتباه على حدود التكامل وهي من $(x, -\infty)$ وإذا كتبت في الامتحان $-\infty, +\infty$ تعتبر خطأ لأنه لا يعرف دالة بل يكون الناتج 1 أي أجاد بشيء خاطئ تماماً يجب الانتباه إلى ذلك

بفرض لدينا متحولين x_1, x_2 حيث دالة التوزيع $F(x_1, x_2)$ ودالة الكثافة الاحتمالية $f(x_1, x_2)$

ما هي العلاقة بين $F(x_1, x_2)$ و $f(x_1, x_2)$

هنالك لدينا ما يسمى بالمشتق الجزئي وهو مثلاً أن يكون لدينا ثلاث متحولات نريد أن نشتق بالنسبة للأول متغير الثاني والثالث ثوابت حيث أن المشتق من الرتبة الثانية لدالة التوزيع = دالة الكثافة

$$\text{دالة التوزيع } \frac{d^2 F(x_1, x_2)}{dx_1 \cdot dx_2} = f(x_1, x_2) \text{ الكثافة}$$

$$\Rightarrow F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(t, z)\, dt\, dz$$

حيث t و z هما متحولان وسيطيان

هل يوجد فرق بين المتحولات المتقطعة والمستمرة نعم في المتقطعة لم نتكلم عن اشتقاق أو تكامل والسبب لأنه حتى نستطيع أن نكامل أو نشتق يجب أن تكون الدالة مستمرة



تكون مستقلة $g(X_i)$ $\prod_{i=1}^{n}$ = $f(X)$ متجهية

مستقلة $F(X_i)$ $\prod_{i=1}^{n}$ = $F(X)$ ← التوزيع

$f(X_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\underline{X})\, dX_2 \, dX_3 \cdots dX_n$ دالة

الكثافة الاحتمالية

$\Rightarrow F(\underline{X}_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\underline{X}_k)\, dX_1 \, dX_2 \cdots dX_{k-1} \, dX_{k+1}$

دالة كثافة هامشية

مبرهنة: { ليكن X, Y متحولان عشوائيان مستقلان إذا وفقط إذا

$f(X,Y) = f(X) \cdot f(Y)$ }

هل يمكننا أن نثبت أن الكثافة المشتركة تساوي جداء الكثافتين؟

الإثبات:

بما أنه لدينا X, Y مستقلان

مشتق مرتين $f(X,Y) = f(X) \cdot f(Y)$

$f(X,Y) = \frac{\partial^2 F(X,Y)}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \frac{F(y)}{\partial y} = F'(x) \cdot F'(y)$

$= f(x) \cdot f(y)$

قمنا بالاشتقاق مرتين للحصول على دالة الكثافة الاحتمالية

نكون قد أثبتنا لزوم الشرط فقط

كفاية الشرط: يجب أن $f(X,Y) = f(x) \cdot f(y)$

نثبت الاستقلال نعود إلى المكاملة

$F(X,Y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(t,z)\, dt \, dz$

$= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_t \cdot f_z \, dt \cdot dz$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \cdot \int_{-\infty}^{y} f(z)\, dz$$

$$= f(x) \cdot f(y)$$

إذاً المتحولان منفصلان

تمرين: ليكن لدينا $X, Y \in \mathbb{R}$ و

$$f(x,y) = \frac{\alpha}{x^2 + y^2 + x^2y^2 + 1}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{\alpha}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

① : أوجد α حتى تكون دالة كثافة احتمالية

حتى تكون دالة كثافة يجب أن يكون

$$\int \frac{\alpha}{(1+x^2)(1+y^2)}\, dx \cdot dy = 1$$

$$\Rightarrow \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{dx}{1+x^2} \right] \frac{dy}{1+y_2} = 1$$

$$\Rightarrow \alpha \left[\arctan \pi \right]_{-\infty}^{+\infty} \cdot \left[\arctan \pi \right]_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

$$\Rightarrow \alpha \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \alpha (\pi)(\pi) = 1 \Rightarrow \alpha \pi^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\pi^2}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} \quad ; \quad x, y \in \mathbb{R}$$

② : أثبت أن المتحولات مستقلة

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$



③ أثبت بطريقتين على الأقل استقلال المتحولين

الطريقة الأولى

$$f(x,y) = \frac{\alpha}{1+x^2 \cdot \frac{1}{1+y^2}} = \frac{\alpha}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+y^2}$$

الطريقة الثانية

$$f(x) \cdot f(y) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \cdot \frac{1}{\pi(1+y^2)} = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} = f(x,y)$$

الطريقة الثالثة :

$$f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{y} f(z)\, dz$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \frac{dt \quad dz}{(1+t^2)(1+z^2)}$$

④ : احسب التوقع بطريقتين

طريقة أولى (الحالة العامة)

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int x\,(f(x,y))\, dx \cdot dy$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, dx}{1+x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2}$$

طريقة ثانية :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, dx}{1+x^2}$$

سؤال للمناقشة ؟

هل توقع المجموع يساوي مجموع التوقعات في حال المتحول منقطع وله قانون احتمال $F(X)$

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E\left(\sum^{n} X_i\right)$$

نعرف $X = \sum_{x_1, x_2 \dots x_n}^{n} X_i$

$$= \sum_{x_1, x_2 \dots x_n} X\, f(X) = \sum_{x_1 \dots x_n} x_1 f(X) + \sum^{n}_{x_1 x_2 \dots x_n} x_2 f(X) + \sum_{x_1, x_2 \dots x_n} x_n f(X)$$

$$= E X_1 + E X_2 + E X_3 = \sum^{n} E X$$

نستنتج المبرهنة الآتية (الأولى):

"أن توقع المجموع يساوي مجموع التوقعات في المتحول المنفصل"

سننتقل الآن إلى فكرة جديدة وهو ما يسمى بالتغاير ☺

تمرين: ① أوجد تغاير المتحولين (X, Y)

② ثم بين متى يكون توقع الجداء يساوي جداء التوقعات

① : يرمز للتغاير بالرمز Cov ويعطى بالعلاقة

$$Cov(X,Y) = E(X - \mu_1)(Y - \mu_2) \quad \text{و} \quad \mu_1 = EX \quad \mu_2 = EY$$

$$\Rightarrow Cov(X,Y) = E(XY - \mu_2 X - \mu_1 Y + \mu_1 \mu_2)$$

توقع المجموع = مجموع التوقعات

$$= EXY - \mu_2 EX - \mu_1 EY + \mu_1 \mu_2$$

$$= EXY - \mu_1 \mu_2 - \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_2$$

$$Cov(X,Y) = EXY - 2\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_2 = EXY - \mu_1 \mu_2$$

$$\Rightarrow Cov(X,Y) = EXY - \mu_1 \mu_2$$

سنتكلم عن بعض الملاحظات

اقلب الصفحة أولاً ☺

ملاحظة ①: ملاحظ أن القانون الأخير أعم بكثير من القانون الأول وتم استنتاج ذلك بالحالة العامة دون خصوصية ويمكن اعتبار القانون الأخير بمثابة تعريف للتغاير المتحولين

① ... $E(X,Y) = \int\int_{-\infty}^{+\infty} x\,y\, f(x,y)\, dx\, dy$ ... ②

② ... $E(X) \cdot E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(y)\, dy$

واضح من العلاقتين ① و ② أنه لو كان المتحولين مستقلين لانطبقت ① تماماً ② وهذا يعني أن توقع الجداء يساوي جداء التوقعات إلا إذا كان المتحولات منفصلات

ملاحظة ②: نلاحظ أنه لو كان توقع الجداء يساوي جداء التوقعات لكان التغاير يساوي الصفر

* مبرهنة: إذا كان (X,Y) مستقلان ⇐ $E(X,Y) = E(X) \cdot E(Y)$

وعندئذ $Cov(X,Y) = 0$

التشتت

$Var(X,Y) = E(X+Y)^2 - (E(X+Y))^2$

$= EX^2 + EY^2 + 2EXY - \{(EX)^2 + (EY)^2 + 2(EX)(EY)\}$

$= Var X + Var Y - 2\, Cov(X,Y)$

يصبح تشتت المجموع يساوي مجموع التشتتات إذا كان التغاير معدوم أي $Cov(X,Y) = 0$

معامل الارتباط

يعطى بالعلاقة $\rho(x,y) = \dfrac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var x \cdot Var y}}$

$-1 \le \rho(x,y) \le 1$

كلما اقترب من -1 كان ارتباطاً قوياً سلبياً

// اقترب من الصفر لا يوجد ارتباط (يكون استقلال)

كلما اقترب من 1 كان ارتباطاً قوياً إيجابياً

ما هي العلاقة بين $\rho(ax+b, cy+d)$ و $\rho(x,y)$ ؟

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ و $Cov(ax+b, cy+d)$

$= E(ax+b)(cy+d) - (aEx+b)(cEx+d)$

$= acEXY + adEx + bd + bcEy$

$- (acEXEy + adEX + bcEY + bd)$

$= ac(EXy - ExEy)$

$= ac \; Cov(x,y)$

بالبداية ناقشنا العلاقة بين $Cov(x,y)$ و $Cov(ax+b, cy+d)$

حيث $Cov(ax+b, cx+d) = ac\,(Cov(x,y))$

بالتعويض بعلاقة $\rho(x,y)$ نجد أن

$\{ \rho(x,y) = \rho(ax+b, cy+d) \}$

انتهت المحاضرة الخامسة

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح